

La percolation :
un modèle mathématique
simple et complexe à la fois

Marie Thérêt

LPMA, Université Paris Diderot (Paris VII)

Un métal ferromagnétique : qu'est-ce-que c'est ?

La réponse en images grâce au site "Physique à main levée" :

<http://phymain.unisciel.fr/temperature-de-curie-du-fer/>

Un métal ferromagnétique : qu'est-ce-que c'est ?

Un métal ferromagnétique est

- aimanté à une température $T < T_c$;
- non aimanté à une température $T > T_c$.

A la température critique T_c a lieu une **transition de phase**.

Un métal ferromagnétique : qu'est-ce-que c'est ?

Un métal ferromagnétique est

- aimanté à une température $T < T_c$;
- non aimanté à une température $T > T_c$.

A la température critique T_c a lieu une **transition de phase**.

Objectif : construire un modèle mathématique

- assez simple pour être étudié
- assez riche pour présenter une telle transition de phase.

Point de vue de la physique statistique : expliquer le comportement du système entier (l'aimantation du métal) en regardant le comportement des éléments microscopiques qui le composent, *les atomes*.

Boîte à outils mathématiques : les probabilités.

Objectif : construire un modèle mathématique

- assez simple pour être étudié
- assez riche pour présenter une telle transition de phase.

Point de vue de la physique statistique : expliquer le comportement du système entier (l'aimantation du métal) en regardant le comportement des éléments microscopiques qui le composent, *les atomes*.

Boîte à outils mathématiques : les probabilités.

Objectif : construire un modèle mathématique

- assez simple pour être étudié
- assez riche pour présenter une telle transition de phase.

Point de vue de la physique statistique : expliquer le comportement du système entier (l'aimantation du métal) en regardant le comportement des éléments microscopiques qui le composent, *les atomes*.

Boîte à outils mathématiques : les probabilités.

L'origine de l'aimantation

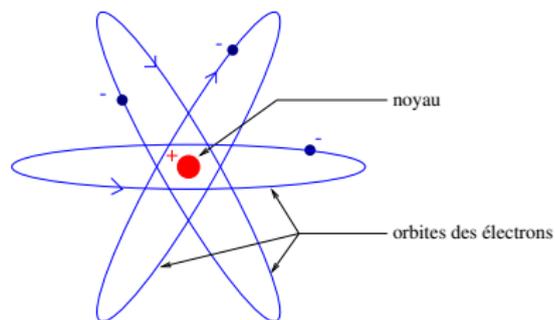


Schéma d'un atome.

On assimile chaque atome à un petit **aimant** :

- le métal est aimanté si ces petits aimants sont orientés dans la même direction,
- le métal n'est pas aimanté si ces petits aimants sont désordonnés.

L'origine de l'aimantation

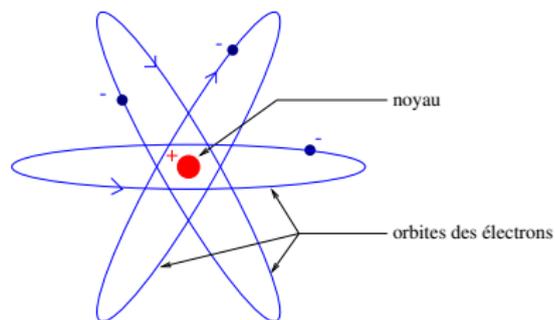


Schéma d'un atome.

On assimile chaque atome à un petit **aimant** :

- le métal est aimanté si ces petits aimants sont orientés dans la même direction,
- le métal n'est pas aimanté si ces petits aimants sont désordonnés.

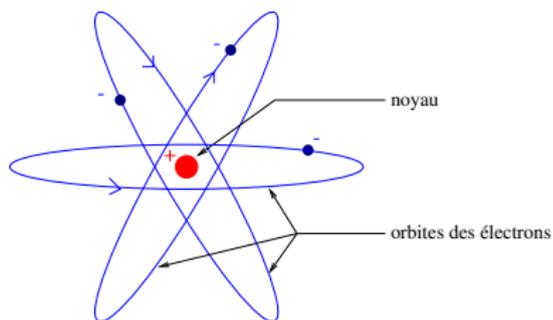


Schéma d'un atome.

On assimile chaque atome à un petit **aimant** :

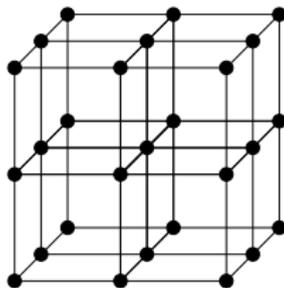
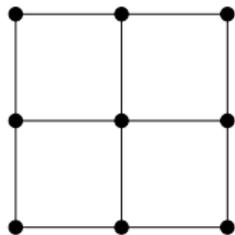
- le métal est aimanté si ces petits aimants sont orientés dans la même direction,
- le métal n'est pas aimanté si ces petits aimants sont désordonnés.

- **l'interaction entre les aimants** :
pousse les aimants à s'orienter dans la même direction,
- **l'agitation thermique** (désordre, entropie) :
il y a beaucoup plus de façons pour les aimants d'être désordonnés qu'ordonnés, donc s'ils tournent au hasard, ils seront la plupart du temps désordonnés ;
~> plus la température est élevée, plus les atomes s'agitent, plus cette force est importante.

- **l'interaction entre les aimants** :
pousse les aimants à s'orienter dans la même direction,
- **l'agitation thermique** (désordre, entropie) :
il y a beaucoup plus de façons pour les aimants d'être désordonnés qu'ordonnés, donc s'ils tournent au hasard, ils seront la plupart du temps désordonnés ;
↪ plus la température est élevée, plus les atomes s'agitent, plus cette force est importante.

- **l'interaction entre les aimants** :
pousse les aimants à s'orienter dans la même direction,
- **l'agitation thermique** (désordre, entropie) :
il y a beaucoup plus de façons pour les aimants d'être désordonnés qu'ordonnés, donc s'ils tournent au hasard, ils seront la plupart du temps désordonnés ;
↪ *plus la température est élevée, plus les atomes s'agitent, plus cette force est importante.*

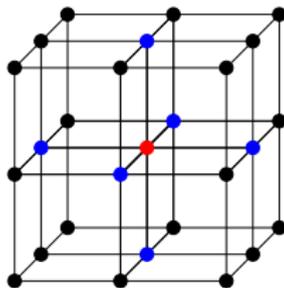
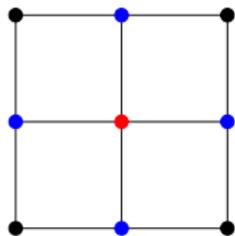
- Les atomes sont alignés suivant un quadrillage, dans une boîte,
- les atomes n'inter-agissent qu'avec leurs plus proches voisins,
- les aimants sont orientés vers le haut ou vers le bas.



Alignement des atomes en dimension 2 (à gauche) et 3 (à droite).

Les simplifications

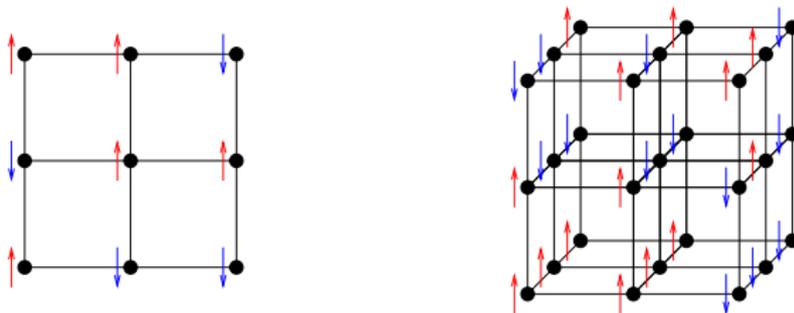
- Les atomes sont alignés suivant un quadrillage, dans une boîte,
- les atomes n'inter-agissent qu'avec leurs plus proches voisins,
- les aimants sont orientés vers le haut ou vers le bas.



Alignement des atomes en dimension 2 (à gauche) et 3 (à droite).

Les simplifications

- Les atomes sont alignés suivant un quadrillage, dans une boîte,
- les atomes n'inter-agissent qu'avec leurs plus proches voisins,
- les aimants sont orientés vers le haut ou vers le bas.



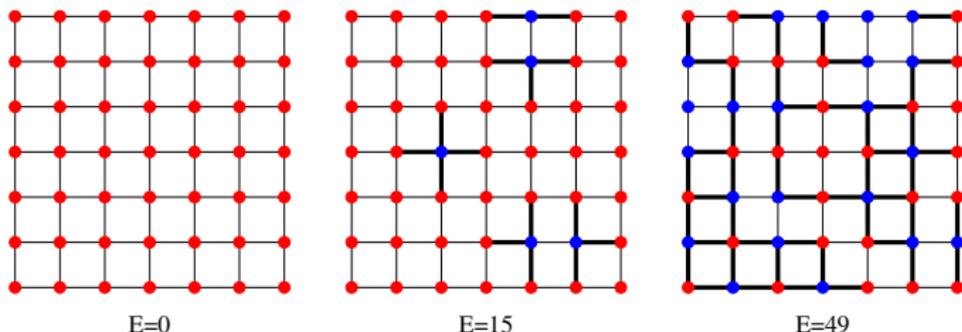
Alignement des atomes en dimension 2 (à gauche) et 3 (à droite).

- **une configuration** σ est une description des états (haut ou bas) de tous les aimants,
- l'énergie $E(\sigma)$ de cette configuration est

$E(\sigma)$ = nombre de couples d'aimants voisins
qui ne sont pas dans le même état pour σ .

- **une configuration** σ est une description des états (haut ou bas) de tous les aimants,
- **l'énergie** $E(\sigma)$ de cette configuration est

$E(\sigma)$ = nombre de couples d'aimants voisins
qui ne sont pas dans le même état pour σ .



*Trois exemples de configurations en dimension 2
(rouge = haut, bleu = bas).*

- **une configuration** σ est une description des états (haut ou bas) de tous les aimants,
- **l'énergie** $E(\sigma)$ de cette configuration est
 $E(\sigma) =$ nombre de couples d'aimants voisins
qui ne sont pas dans le même état pour σ .
- à température T fixée ($T \geq 0$), **la probabilité** $\mathbb{P}_T(\sigma)$ d'une configuration σ est proportionnelle à

$$\exp\left(-\frac{E(\sigma)}{T}\right),$$

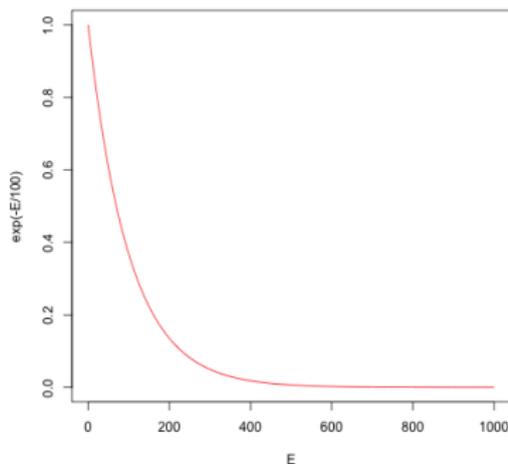
i.e.,

$$\mathbb{P}_T(\sigma) = \frac{\exp\left(-\frac{E(\sigma)}{T}\right)}{Z_T} \quad \text{avec} \quad Z_T = \sum_{\sigma'} \exp\left(-\frac{E(\sigma')}{T}\right).$$

Est-ce que cette probabilité nous convient ?

Première vérification

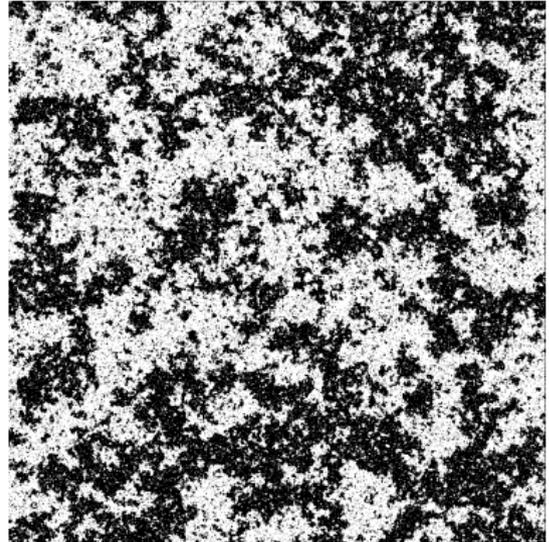
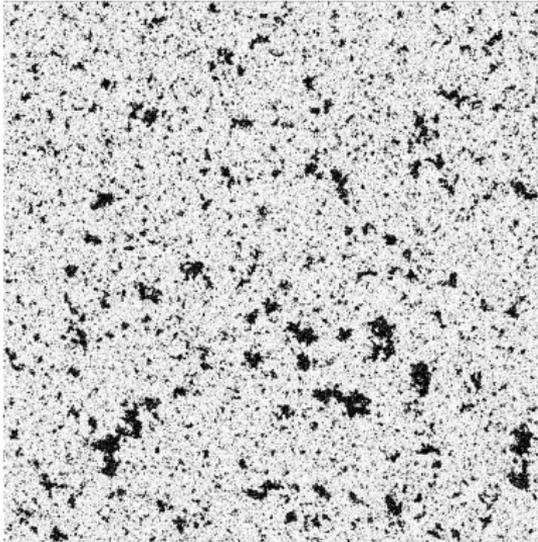
A T fixé, si $E(\sigma) < E(\sigma')$ alors $\mathbb{P}_T(\sigma) > \mathbb{P}_T(\sigma')$.



Courbe de la fonction qui à E associe $\exp(-E/T)$ pour $T = 100$.

Est-ce que cette probabilité nous convient ?

Quelques simulations de Raphaël Cerf (DMA, ENS)



Simulation de l'état des atomes en dimension 2 à température basse (à gauche) et haute (à droite) (blanc = haut, noir = bas).

Est-ce que cette probabilité nous convient ?

$$T \rightarrow 0 \text{ et } T \rightarrow +\infty$$

- $T \rightarrow +\infty$:

Pour toute configuration σ , $\frac{E(\sigma)}{T} \rightarrow 0$ donc $\exp\left(-\frac{E(\sigma)}{T}\right) \rightarrow 1$.

La probabilité limite $\mathbb{P}_{T=\infty}$ est la probabilité uniforme sur toutes les configurations, c'est le **désordre total**.

- $T \rightarrow 0$:

- Si $E(\sigma) = 0$, $\frac{E(\sigma)}{T} = 0$ pour tout T donc $\exp\left(-\frac{E(\sigma)}{T}\right) = 1$;

- Si $E(\sigma) > 0$, $\frac{E(\sigma)}{T} \rightarrow +\infty$ donc $\exp\left(-\frac{E(\sigma)}{T}\right) \rightarrow 0$.

La probabilité limite $\mathbb{P}_{T=0}$ est la probabilité uniforme sur toutes les configurations d'énergie nulle, c'est l'**ordre total**.

Est-ce que cette probabilité nous convient ?

$$T \rightarrow 0 \text{ et } T \rightarrow +\infty$$

- $T \rightarrow +\infty$:

Pour toute configuration σ , $\frac{E(\sigma)}{T} \rightarrow 0$ donc $\exp\left(-\frac{E(\sigma)}{T}\right) \rightarrow 1$.

La probabilité limite $\mathbb{P}_{T=\infty}$ est la probabilité uniforme sur toutes les configurations, c'est le **désordre total**.

- $T \rightarrow 0$:

- Si $E(\sigma) = 0$, $\frac{E(\sigma)}{T} = 0$ pour tout T donc $\exp\left(-\frac{E(\sigma)}{T}\right) = 1$;

- Si $E(\sigma) > 0$, $\frac{E(\sigma)}{T} \rightarrow +\infty$ donc $\exp\left(-\frac{E(\sigma)}{T}\right) \rightarrow 0$.

La probabilité limite $\mathbb{P}_{T=0}$ est la probabilité uniforme sur toutes les configurations d'énergie nulle, c'est l'**ordre total**.

Est-ce que cette probabilité nous convient ?

Evolution de $\mathbb{P}_T(\sigma)$ avec T

On compare les probabilités d'observer une configuration σ d'énergie E et σ' d'énergie nulle à température T :

$$\frac{\mathbb{P}_T(\sigma)}{\mathbb{P}_T(\sigma')} = \frac{\exp(-E/T)}{\exp(-0/T)} = \exp(-E/T).$$

Pour $T' = T/2$, on obtient :

$$\frac{\mathbb{P}_{T'}(\sigma)}{\mathbb{P}_{T'}(\sigma')} = \exp(-E/T') = \exp(-2E/T) = \left(\frac{\mathbb{P}_T(\sigma)}{\mathbb{P}_T(\sigma')} \right)^2.$$

Pour $E = 1000$, $T = 434\text{K}$ ($\sim 160^\circ\text{C}$), $T' = 217\text{K}$ ($\sim -56^\circ\text{C}$) :

$$\frac{\mathbb{P}_T(\sigma)}{\mathbb{P}_T(\sigma')} \sim 0,1 \quad \text{et} \quad \frac{\mathbb{P}_{T'}(\sigma)}{\mathbb{P}_{T'}(\sigma')} \sim 0,01.$$

Est-ce que cette probabilité nous convient ?

Evolution de $\mathbb{P}_T(\sigma)$ avec T

On compare les probabilités d'observer une configuration σ d'énergie E et σ' d'énergie nulle à température T :

$$\frac{\mathbb{P}_T(\sigma)}{\mathbb{P}_T(\sigma')} = \frac{\exp(-E/T)}{\exp(-0/T)} = \exp(-E/T).$$

Pour $T' = T/2$, on obtient :

$$\frac{\mathbb{P}_{T'}(\sigma)}{\mathbb{P}_{T'}(\sigma')} = \exp(-E/T') = \exp(-2E/T) = \left(\frac{\mathbb{P}_T(\sigma)}{\mathbb{P}_T(\sigma')} \right)^2.$$

Pour $E = 1000$, $T = 434\text{K}$ ($\sim 160^\circ\text{C}$), $T' = 217\text{K}$ ($\sim -56^\circ\text{C}$) :

$$\frac{\mathbb{P}_T(\sigma)}{\mathbb{P}_T(\sigma')} \sim 0,1 \quad \text{et} \quad \frac{\mathbb{P}_{T'}(\sigma)}{\mathbb{P}_{T'}(\sigma')} \sim 0,01.$$

Est-ce que cette probabilité nous convient ?

Evolution de $\mathbb{P}_T(\sigma)$ avec T

On compare les probabilités d'observer une configuration σ d'énergie E et σ' d'énergie nulle à température T :

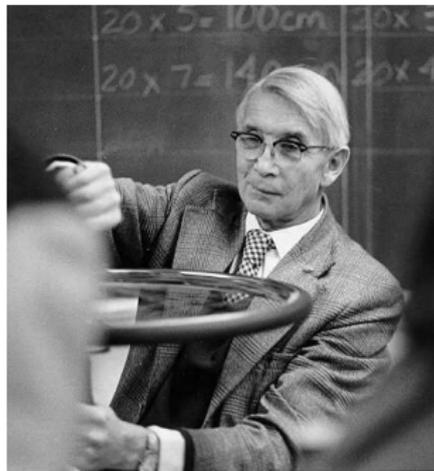
$$\frac{\mathbb{P}_T(\sigma)}{\mathbb{P}_T(\sigma')} = \frac{\exp(-E/T)}{\exp(-0/T)} = \exp(-E/T).$$

Pour $T' = T/2$, on obtient :

$$\frac{\mathbb{P}_{T'}(\sigma)}{\mathbb{P}_{T'}(\sigma')} = \exp(-E/T') = \exp(-2E/T) = \left(\frac{\mathbb{P}_T(\sigma)}{\mathbb{P}_T(\sigma')} \right)^2.$$

Pour $E = 1000$, $T = 434\text{K}$ ($\sim 160^\circ\text{C}$), $T' = 217\text{K}$ ($\sim -56^\circ\text{C}$) :

$$\frac{\mathbb{P}_T(\sigma)}{\mathbb{P}_T(\sigma')} \sim 0,1 \quad \text{et} \quad \frac{\mathbb{P}_{T'}(\sigma)}{\mathbb{P}_{T'}(\sigma')} \sim 0,01.$$



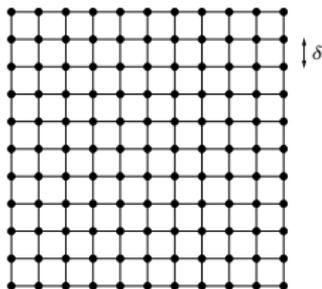
Ernst Ising (1900 - 1998),
physicien allemand.

Thèse de doctorat (1922 -1924) :
directeur : Wilhelm Lenz,
sujet : étude de ce modèle en dimension 1,
conclusion : **ce modèle ne présente pas
de transition de phase en dimension 1.**



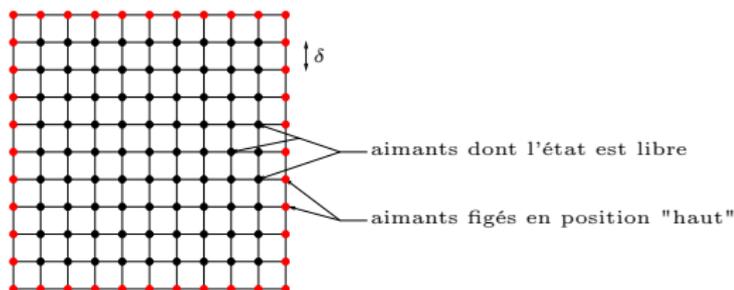
Il y a **aimantation** si les aimants s'influencent les uns les autres à *très très* grande distance.

- $\mathbb{P}_{T, haut}$ = probabilité \mathbb{P}_T conditionnée par l'évènement "les aimants du bord de la boîte sont dans l'état haut."
- A δ fixé, $\mathbb{P}_{T, haut}[\sigma(c) = \text{haut}] > \frac{1}{2}$.
- $m(T) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{P}_{T, haut}[\sigma(c) = \text{haut}] > \frac{1}{2} ? , = \frac{1}{2} ?$



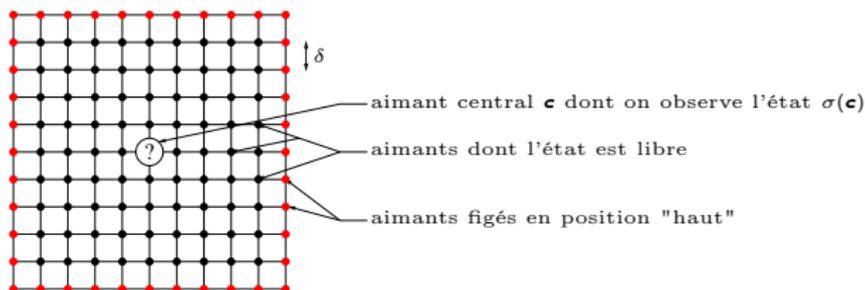
Il y a **aimantation** si les aimants s'influencent les uns les autres à *très très* grande distance.

- $\mathbb{P}_{T, \text{haut}}$ = probabilité \mathbb{P}_T conditionnée par l'évènement "les aimants du bord de la boîte sont dans l'état haut."
- A δ fixé, $\mathbb{P}_{T, \text{haut}}[\sigma(c) = \text{haut}] > \frac{1}{2}$.
- $m(T) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{P}_{T, \text{haut}}[\sigma(c) = \text{haut}] > \frac{1}{2} ? , = \frac{1}{2} ?$



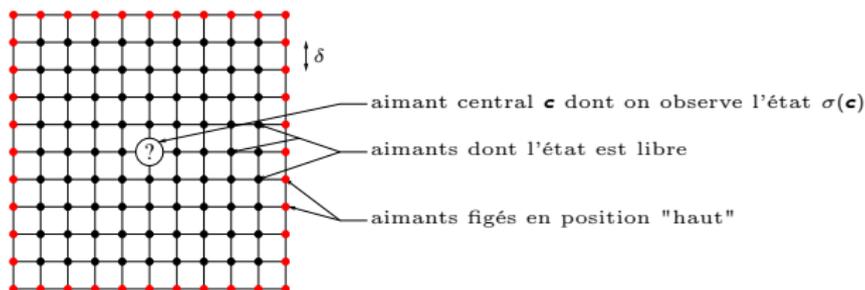
Il y a **aimantation** si les aimants s'influencent les uns les autres à *très très* grande distance.

- $\mathbb{P}_{T, \text{haut}}$ = probabilité \mathbb{P}_T conditionnée par l'évènement "les aimants du bord de la boîte sont dans l'état haut."
- A δ fixé, $\mathbb{P}_{T, \text{haut}}[\sigma(\mathbf{c}) = \text{haut}] > \frac{1}{2}$.
- $m(T) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{P}_{T, \text{haut}}[\sigma(\mathbf{c}) = \text{haut}] > \frac{1}{2} ? , = \frac{1}{2} ?$



Il y a **aimantation** si les aimants s'influencent les uns les autres à *très très* grande distance.

- $\mathbb{P}_{T, \text{haut}}$ = probabilité \mathbb{P}_T conditionnée par l'évènement "les aimants du bord de la boîte sont dans l'état haut."
- A δ fixé, $\mathbb{P}_{T, \text{haut}}[\sigma(\mathbf{c}) = \text{haut}] > \frac{1}{2}$.
- $m(T) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{P}_{T, \text{haut}}[\sigma(\mathbf{c}) = \text{haut}] > \frac{1}{2} ? , = \frac{1}{2} ?$



Il y a **aimantation** si les aimants s'influencent les uns les autres à *très très* grande distance.

- $\mathbb{P}_{T, \text{haut}}$ = probabilité \mathbb{P}_T conditionnée par l'évènement "les aimants du bord de la boîte sont dans l'état haut."
- A δ fixé, $\mathbb{P}_{T, \text{haut}}[\sigma(c) = \text{haut}] > \frac{1}{2}$.
- $m(T) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{P}_{T, \text{haut}}[\sigma(c) = \text{haut}] > \frac{1}{2}?, = \frac{1}{2}?$

Théorème (Rudolf Peierls, 1936) en dimension $d \geq 2$

Il existe une température critique T_c telle que $0 < T_c < +\infty$ et

- si $T < T_c$, alors $m(T) > 1/2$: **il y a aimantation**,
- si $T > T_c$, alors $m(T) = 1/2$: **il n'y a pas d'aimantation**.

Ce qu'on sait... et ce qu'on ne sait pas !

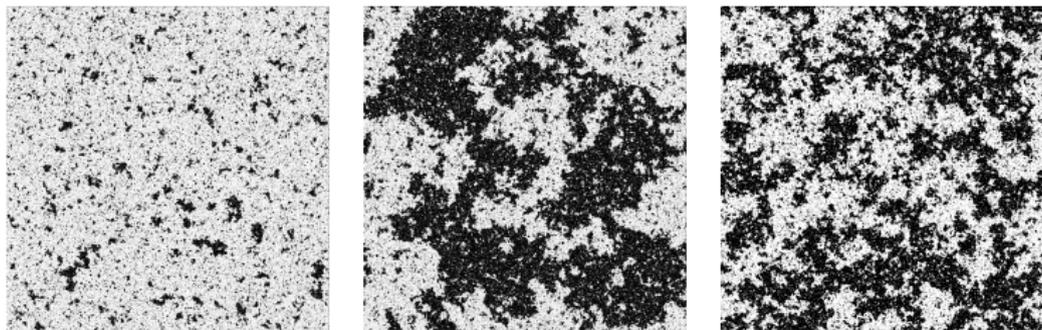
- La température critique T_c :
 - en dimension 2, $T_c = \frac{2}{\log(1+\sqrt{2})}$ (Lars Onsager, 1944).
 - en dimension 3, on ne sait pas calculer T_c .
- Le comportement du système pour $T = T_c$: pas d'aimantation, mais encore beaucoup de mystères...

Simulation de l'état des atomes en dimension 2 à température $T < T_c$ (à gauche), $T = T_c$ (au milieu) et $T > T_c$ (à droite), (blanc = haut, noir = bas).

↪ *Travaux récents de Stanislav Smirnov (médaille Fields 2010).*

Ce qu'on sait... et ce qu'on ne sait pas !

- La température critique T_c :
 - en dimension 2, $T_c = \frac{2}{\log(1+\sqrt{2})}$ (Lars Onsager, 1944).
 - en dimension 3, on ne sait pas calculer T_c .
- Le comportement du système pour $T = T_c$: pas d'aimantation, mais encore beaucoup de mystères...



Simulation de l'état des atomes en dimension 2 à température $T < T_c$ (à gauche), $T = T_c$ (au milieu) et $T > T_c$ (à droite), (blanc = haut, noir = bas).

↪ *Travaux récents de Stanislav Smirnov (médaille Fields 2010).*

Un modèle plus simple : le modèle de percolation

- **l'objet** : un morceau de roche, peut-être poreuse ;
- **les éléments microscopiques** : des petits tuyaux à l'intérieur de la roche ;
- **les simplifications** :
 - les tuyaux sont alignés suivant un quadrillage, dans une boîte,
 - les tuyaux laissent passer ou non l'eau avec la même probabilité $p \in [0, 1]$, indépendamment les uns des autres.



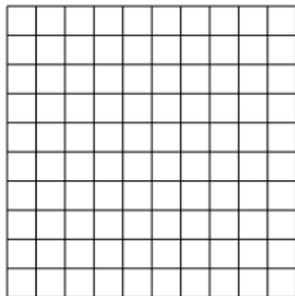
Un modèle plus simple : le modèle de percolation

- **l'objet** : un morceau de roche, peut-être poreuse ;
- **les éléments microscopiques** : des petits tuyaux à l'intérieur de la roche ;
- **les simplifications** :
 - les tuyaux sont alignés suivant un quadrillage, dans une boîte,
 - les tuyaux laissent passer ou non l'eau avec la même probabilité $p \in [0, 1]$, indépendamment les uns des autres.



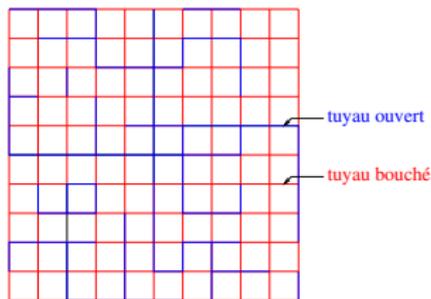
Un modèle plus simple : le modèle de percolation

- **l'objet** : un morceau de roche, peut-être poreuse ;
- **les éléments microscopiques** : des petits tuyaux à l'intérieur de la roche ;
- **les simplifications** :
 - les tuyaux sont alignés suivant un quadrillage, dans une boîte,
 - les tuyaux laissent passer ou non l'eau avec la même probabilité $p \in [0, 1]$, indépendamment les uns des autres.



Un modèle plus simple : le modèle de percolation

- **l'objet** : un morceau de roche, peut-être poreuse ;
- **les éléments microscopiques** : des petits tuyaux à l'intérieur de la roche ;
- **les simplifications** :
 - les tuyaux sont alignés suivant un quadrillage, dans une boîte,
 - les tuyaux laissent passer ou non l'eau avec la même probabilité $p \in [0, 1]$, indépendamment les uns des autres.



Un modèle plus simple : le modèle de percolation

- **l'objet** : un morceau de roche, peut-être poreuse ;
- **les éléments microscopiques** : des petits tuyaux à l'intérieur de la roche ;
- **les simplifications** :
 - les tuyaux sont alignés suivant un quadrillage, dans une boîte,
 - les tuyaux laissent passer ou non l'eau avec la même probabilité $p \in [0, 1]$, indépendamment les uns des autres.
- **une configuration** $\tilde{\sigma}$ est une description de l'état (ouvert ou bouché) de tous les tuyaux ;

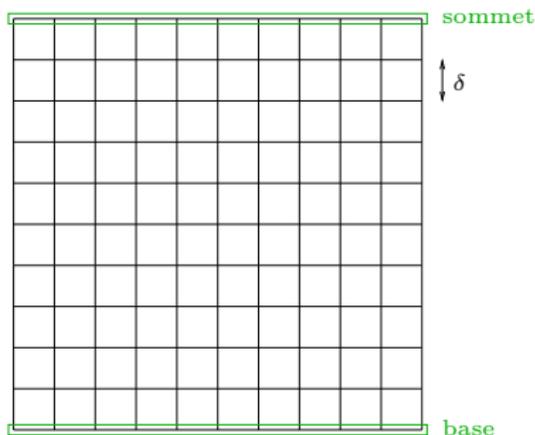
Un modèle plus simple : le modèle de percolation

- **l'objet** : un morceau de roche, peut-être poreuse ;
- **les éléments microscopiques** : des petits tuyaux à l'intérieur de la roche ;
- **les simplifications** :
 - les tuyaux sont alignés suivant un quadrillage, dans une boîte,
 - les tuyaux laissent passer ou non l'eau avec la même probabilité $p \in [0, 1]$, indépendamment les uns des autres.
- **une configuration** $\tilde{\sigma}$ est une description de l'état (ouvert ou bouché) de tous les tuyaux ;
- **la probabilité** $\tilde{\mathbb{P}}_p(\tilde{\sigma})$ d'une configuration $\tilde{\sigma}$ pour un paramètre p de porosité donné est

$$\tilde{\mathbb{P}}_p(\tilde{\sigma}) = p^{\# \text{ tuyaux ouverts dans } \tilde{\sigma}} \times (1-p)^{\# \text{ tuyaux bouchés dans } \tilde{\sigma}} .$$

La roche est **poreuse** si l'eau peut la traverser à *très très* grande échelle.

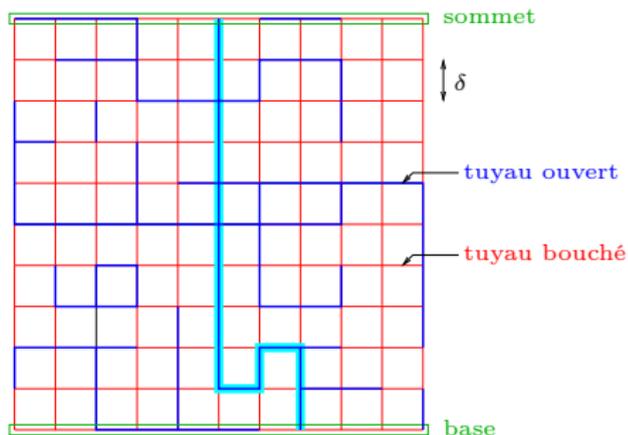
- A δ fixé, $\tilde{\mathbb{P}}_p(\text{sommet} \longleftrightarrow \text{base}) > 0$.
- $\psi(p) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{\mathbb{P}}_p(\text{sommet} \longleftrightarrow \text{base}) > 0? = 0?$



Transition de phase

La roche est **poreuse** si l'eau peut la traverser à *très très* grande échelle.

- A δ fixé, $\tilde{\mathbb{P}}_\rho(\text{sommet} \longleftrightarrow \text{base}) > 0$.
- $\psi(\rho) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{\mathbb{P}}_\rho(\text{sommet} \longleftrightarrow \text{base}) > 0? = 0?$



La roche est **poreuse** si l'eau peut la traverser à *très très* grande échelle.

- A δ fixé, $\tilde{\mathbb{P}}_p(\text{sommet} \longleftrightarrow \text{base}) > 0$.
- $\psi(p) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{\mathbb{P}}_p(\text{sommet} \longleftrightarrow \text{base}) > 0? = 0?$

Théorème (Simon Broadbent et John Hammersley, 1957 à 1959) en dimension $d \geq 2$

Il existe un paramètre critique p_c telle que $0 < p_c < 1$ et

- si $p < p_c$, alors $\psi(p) = 0$: **la roche n'est pas poreuse**,
- si $p > p_c$, alors $\psi(p) > 0$: **la roche est poreuse**.

Ce qu'on sait... et ce qu'on ne sait pas !

- Le paramètre critique p_c :
 - en dimension 2, $p_c = \frac{1}{2}$ (Harry Kesten, 1980).
 - en dimension 3, on ne sait pas calculer p_c .
- Le comportement du système à $p = p_c$:
 - en dimension 2, $\psi\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ (Ted Harris, 1960).
 - en dimension 3, **on conjecture que** $\psi(p_c) = 0$.

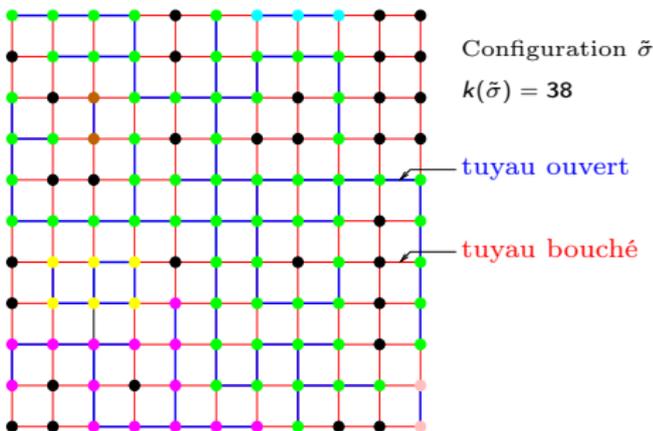
↪ *Travaux récents de Wendelin Werner (médaille Fields 2006)
et Stanislav Smirnov (médaille Fields 2010).*

- Le paramètre critique p_c :
 - en dimension 2, $p_c = \frac{1}{2}$ (Harry Kesten, 1980).
 - en dimension 3, on ne sait pas calculer p_c .
 - Le comportement du système à $p = p_c$:
 - en dimension 2, $\psi\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ (Ted Harris, 1960).
 - en dimension 3, **on conjecture que** $\psi(p_c) = 0$.
- ↪ *Travaux récents de Wendelin Werner (médaille Fields 2006)
et Stanislav Smirnov (médaille Fields 2010).*

Une variante : la FK-percolation

- A une configuration $\tilde{\sigma}$ on associe $k(\tilde{\sigma})$ le nombre de ses composantes connexes.
- On fixe un deuxième paramètre $q \in [1, +\infty[$.
- On associe à une configuration $\tilde{\sigma}$ une probabilité $\hat{\mathbb{P}}_{p,q}(\tilde{\sigma})$ proportionnelle à

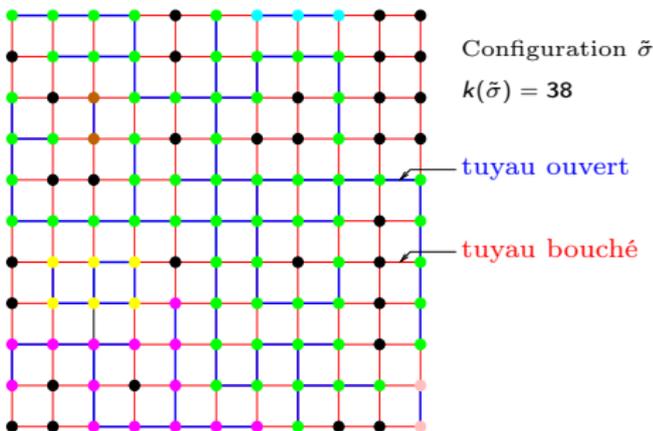
$$p^{\# \text{ tuyaux ouverts dans } \tilde{\sigma}} \times (1 - p)^{\# \text{ tuyaux bouchés dans } \tilde{\sigma}} \times q^{k(\tilde{\sigma})}.$$



Une variante : la FK-percolation

- A une configuration $\tilde{\sigma}$ on associe $k(\tilde{\sigma})$ le nombre de ses composantes connexes.
- On fixe un deuxième paramètre $q \in [1, +\infty[$.
- On associe à une configuration $\tilde{\sigma}$ une probabilité $\hat{\mathbb{P}}_{p,q}(\tilde{\sigma})$ proportionnelle à

$$p^{\# \text{ tuyaux ouverts dans } \tilde{\sigma}} \times (1 - p)^{\# \text{ tuyaux bouchés dans } \tilde{\sigma}} \times q^{k(\tilde{\sigma})}.$$



Une variante : la FK-percolation

- A une configuration $\tilde{\sigma}$ on associe $k(\tilde{\sigma})$ le nombre de ses composantes connexes.
- On fixe un deuxième paramètre $q \in [1, +\infty[$.
- On associe à une configuration $\tilde{\sigma}$ une probabilité $\hat{\mathbb{P}}_{p,q}(\tilde{\sigma})$ proportionnelle à

$$p^{\#\text{ tuyaux ouverts dans } \tilde{\sigma}} \times (1 - p)^{\#\text{ tuyaux bouchés dans } \tilde{\sigma}} \times q^{k(\tilde{\sigma})}.$$

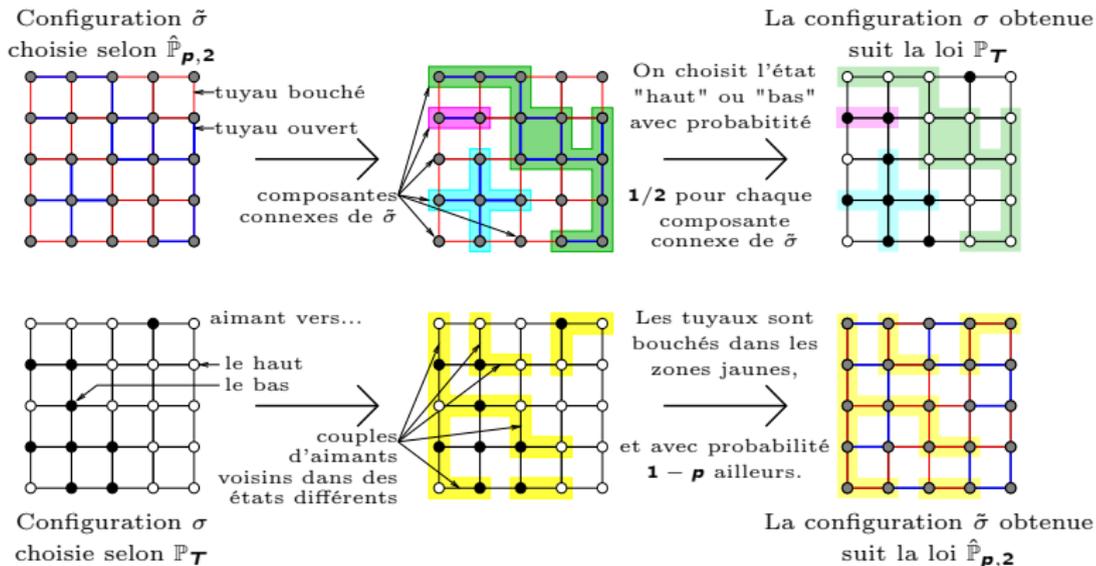
\rightsquigarrow C'est le modèle de FK-percolation, introduit par Cees Fortuin et Peet Kasteleyn dans les années 1960. Il présente lui aussi une transition de phase à un paramètre critique $p_c(q)$ qui dépend de q .

Les liens entre ces différentes probabilités

- Pour $q = 1$, c'est le modèle de **percolation standard** :
 $\hat{\mathbb{P}}_{p,1} = \tilde{\mathbb{P}}_p$.
- Pour $q = 2$, on récupère le **modèle d'Ising** :
on peut passer de $\hat{\mathbb{P}}_{p,2}$ à \mathbb{P}_T avec $p = 1 - e^{-1/T}$.

Les liens entre ces différentes probabilités

- Pour $q = 1$, c'est le modèle de **percolation standard** :
 $\hat{\mathbb{P}}_{p,1} = \tilde{\mathbb{P}}_p$.
- Pour $q = 2$, on récupère le **modèle d'Ising** :
 on peut passer de $\hat{\mathbb{P}}_{p,2}$ à \mathbb{P}_T avec $p = 1 - e^{-1/T}$.



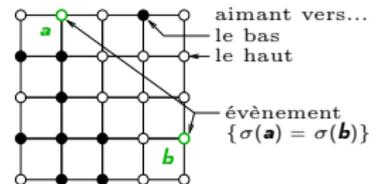
Les liens entre ces différentes probabilités

- Pour $q = 1$, c'est le modèle de **percolation standard** :
 $\hat{\mathbb{P}}_{p,1} = \tilde{\mathbb{P}}_p$.
- Pour $q = 2$, on récupère le **modèle d'Ising** :
on peut passer de $\hat{\mathbb{P}}_{p,2}$ à \mathbb{P}_T avec $p = 1 - e^{-1/T}$.

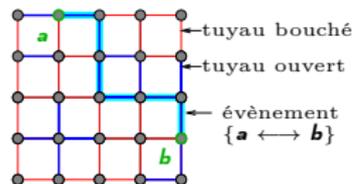
Application :

en fixant $p = 1 - e^{-1/T}$, on a pour tous sommets a et b

$$\mathbb{P}_T(\sigma(a) = \sigma(b)) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \hat{\mathbb{P}}_{p,2}(a \longleftrightarrow b).$$



Configuration σ
choisie selon \mathbb{P}_T



Configuration $\tilde{\sigma}$
choisie selon $\hat{\mathbb{P}}_{p,2}$

Merci !